Módulo 02
Sistemas de Representación

Organización de Computadoras
Depto. Cs. e Ing. de la Comp.
Universidad Nacional del Sur

Copyright

Contenidos

- Álgebra computacional
- Sistemas de representación
- Conversión entre bases:
  - De números enteros
  - De números fraccionarios

Aritmética en computadoras

- Las computadoras se las usa exclusivamente para computar
- Una de las acepciones de computar vimos que es precisamente calcular
- Un prerrequisito para calcular es contar con un sistema de representación y un conjunto de operaciones definidas sobre ese sistema
- Es decir, necesitamos contar con una aritmética

Aritmética en computadoras

- Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. La aritmética real se define como un mapeo algebraico f:

$$\boxed{f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

- Naturalmente, los ejemplo usuales para f son las operaciones de $+$, $-$, $\times$ y $/$ sobre reales
- Nótese que esta álgebra no es apropiada para las computadoras, puesto que éstas sólo pueden operar con magnitudes finitas

Algebra para computadoras

- Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de números representables en una cierta computadora
  - Obsérvese que $\mathbb{M}$ es un subconjunto estricto de $\mathbb{R}$, puesto que su cardinalidad es finita
- Finalmente, es posible definir una aritmética adecuada para computadoras sobre $\mathbb{M}$:

$$\boxed{g\colon \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}}$$

- Esta aritmética se denomina aritmética real aproximada

Mapeo funcional

- La función máquina g se relaciona con la real f a través de la siguiente función compuesta:

$$g: \rho \circ h$$

- Donde el mapeo h se define como:

$$h = f_{|\,\mathbb{M} \times \mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R}$$

  - Es decir, la función real f restringida al dominio máquina $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$

Esquema de redondeo

- Por último, la función ρ debe tener como dominio e imagen los siguientes conjuntos:

$$\boxed{\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}}$$

- Esta función denota al esquema de redondeo
  - El esquema de redondeo tiene por objeto decidir cuál es el número máquina que corresponde asociar a cada número real
  - Necesariamente infinitos números reales se asociarán a uno o más números máquina (teorema de Dirichlet)

Sistemas de representación

- La definición precisa de estas funciones y la implementación de las operaciones aritméticas dependen de la representación interna que se adopte para los números
- La elección del sistema de representación afecta tanto al diseño del hardware como del software
- El diseñador tiene que tener en cuenta los requerimientos de desempeño, de precisión y de capacidad de representación

Sistemas de representación

- En función del objetivo que se priorice, se han ensayado (y se siguen ensayando) distintas alternativas:
  - Sistemas numéricos con base
  - Sistemas numéricos de dígito signado
  - Sistemas numéricos residuo
  - Sistemas numéricos racionales
  - Sistemas numéricos logarítmicos

Sistemas con base

- Este es el sistema tradicional al que estamos acostumbrados y es el que analizaremos
- Los números se representan fijando una base y haciendo uso de un conjunto de dígitos
  - Por caso, para una base **b** se utilizan los **b** dígitos comprendidos en el rango **[0, 1, …, b-1]**
  - El aporte de cada dígito al valor representado tiene en cuenta la posición del mismo
  - Cada número tiene exactamente una única representación dentro del sistema

Representación de punto fijo

- En este sistema fijada una base y un conjunto de dígitos, el aporte de cada cada dígito al valor representado depende de su posición
  - La idea es que los primeros **n** dígitos denoten la parte entera y los restante **k** la parte fraccionaria
  - La elección de **n** y de **k**, decisión que toma el diseñador del hardware, fija la posición del punto decimal.
  - Por esta razón, a este tipo de representación se lo denomina de punto fijo (**FXP**)

Representación de punto fijo

- La naturaleza posicional del sistema se observa al considerar el valor representado por una determinada tupla de dígitos:
  - Sea $\mathbf{X} = (\mathbf{d}_{n-1}, \ldots, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_{-1}, \ldots, \mathbf{d}_{-k})_r$ un número representado el sistema con base $\mathbf{r}$.
  - Como se trata de un sistema posicional, el valor representado por el número $\mathbf{X}$ se calcula como el producto interno $\mathbf{X} \times \mathbf{W}$, donde $\mathbf{W}$ denota al conjunto de pesos asociados a cada posición, esto es:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{r}^{n-1}, \ldots, \mathbf{r}^{1}, \mathbf{r}^{0}, \mathbf{r}^{-1}, \ldots, \mathbf{r}^{-k})$$

Representación de punto fijo

- Por caso, para el número **273** en base **10** se verifica que:

$$
\begin{aligned}
(273)_{10} &= 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\
&= 200 + 70 + 3 \\
&= 273
\end{aligned}
$$

- Obsérvese que a mayor **r**, harán falta más bits para codificar cada uno de los dígitos
  - Hacen falta al menos **s** bits para codificar cada dígito de la base **r**, donde $s = \log_2(r)$

Elección de la base

- Para un dado sistema con base **r**, el disponer de **n** dígitos implica lo siguiente:
  - La precisión del sistema, es decir, la cantidad de números representables se calcula como $\mathbf{N = r^n}$
  - La ineficacia en el uso del espacio, es decir, la cantidad de símbolos distintos que se deben almacenar se cuantifica como $\mathbf{D = n \times r}$
- Para determinar cuál es la mejor base se debe primero fijar la precisión para luego minimizar la ineficacia en el uso del espacio

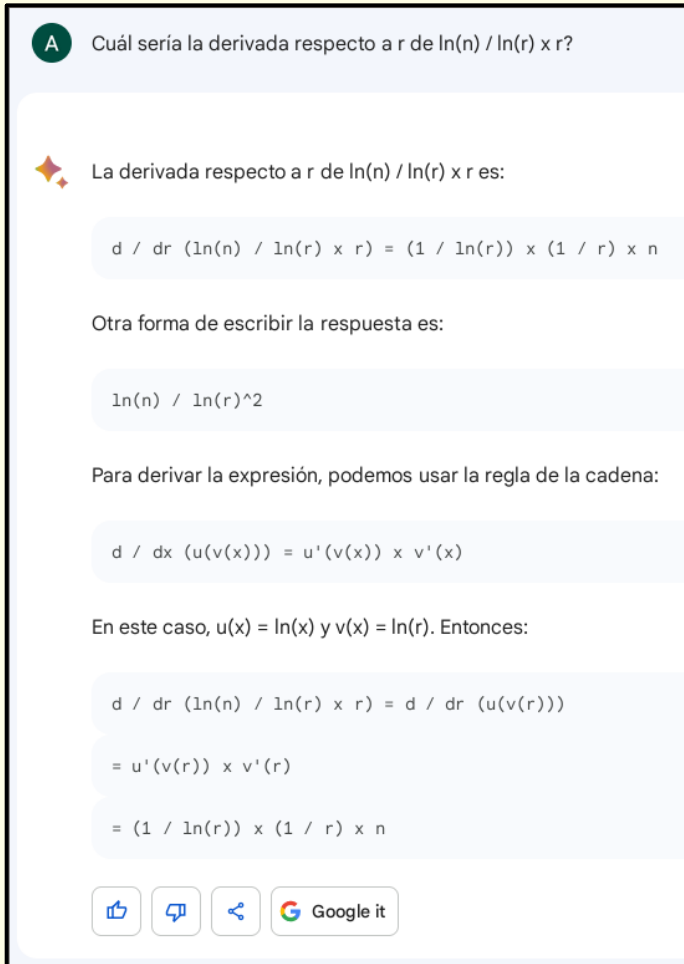
Elección de la base

- En otras palabras, queremos determinar qué **r** minimiza a **D** para un **N** constante
  - Despejando a **n** en la ecuación $N = r^n$ nos queda que $n = \ln(N) / \ln(r)$
  - Usando el resultado anterior, queremos minimizar la expresión $D = n \times r = \ln(N) / \ln(r) \times r$
  - Derivando con respecto a **r** nos queda:

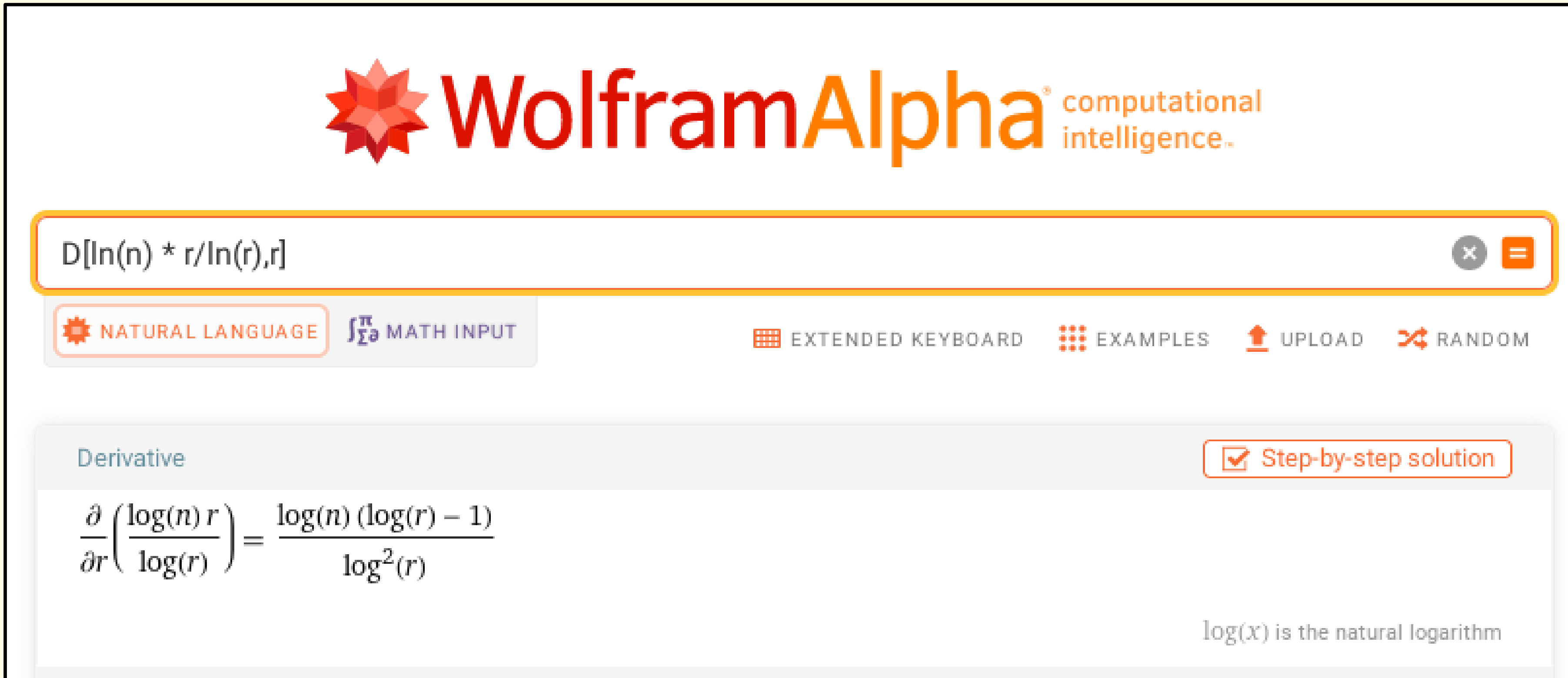
$$dD / dr = \ln(N) \times (\ln(r) - 1) / \ln(r)^2$$

  - Igualando a cero, la solución es $r = e$. Como la base tiene que ser entera, $r = 3$ sería la mejor opción

Como diría Tu-Sam...



¡Zapatero a tus zapatos!



Ley de Engelbart

- Douglas Engelbart (1925-2013), quién recibiera el Premio Turing en 1997, hizo una observación que a la postre se convirtió en ley:

  “La tasa intrínseca del desempeño humano crece exponencialmente”

- Casualmente Gordon Moore se inspiró en esta ley al formular su observación

Engelbart, ¡haz tu gracia!

Cuál es la derivada respecto a r de ln(n) / ln(r) x r?

Para encontrar la derivada de la función $f(r) = \frac{\ln(n)}{\ln(r)} \cdot r$ con respecto a r, seguimos estos pasos:

La función es:

$$f(r) = \frac{\ln(n)}{\ln(r)} \cdot r$$

Podemos escribirla como:

$$f(r) = \ln(n) \cdot \frac{r}{\ln(r)}$$

Ahora, derivamos $f(r)$ respecto a r utilizando la regla del producto:

$$f'(r) = \ln(n) \cdot \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\ln(r)} \right) \right)$$

Para derivar $\frac{r}{\ln(r)}$, utilizamos la regla del cociente, donde si $u(r) = r$ y $v(r) = \ln(r)$, entonces:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{u(r)}{v(r)} \right) = \frac{v(r) \cdot u'(r) - u(r) \cdot v'(r)}{(v(r))^2}$$

Aplicando esto:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\ln(r)} \right) = \frac{\ln(r) \cdot 1 - r \cdot \frac{1}{r}}{(\ln(r))^2}$$

Simplificando:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\ln(r)} \right) = \frac{\ln(r) - 1}{(\ln(r))^2}$$

Entonces, la derivada de $f(r)$ es:

$$f'(r) = \ln(n) \cdot \frac{\ln(r) - 1}{(\ln(r))^2}$$

Por lo tanto, la derivada de la función $\frac{\ln(n)}{\ln(r)} \cdot r$ con respecto a r es:

$$f'(r) = \frac{\ln(n) \cdot (\ln(r) - 1)}{(\ln(r))^2}$$

Elección de la base

- Hay cuatro sistemas en uso, los que corresponden a las bases **2**, **8**, **10** y **16**
  - La base **10** es obviamente la preferida por los humanos en cualquier actividad
  - La base **2** es la preferida por las computadoras, debido a que la electrónica digital biestable es mucho más sencilla, económica y confiable que la triestable
  - Las bases **8** y **16** se utilizan frecuentemente para comunicar número binarios compuestos de muchos dígitos de manera compacta

Conversión entre bases

- Es posible convertir un número de una base a otra mediante dos métodos:
  - Método de la multiplicación
  - Método de la división
- También se debe distinguir entre la conversión de números enteros o de números fraccionarios
- En otras palabras, debemos considerar cuatro métodos de conversión entre bases

Conversión de enteros

- Método de la multiplicación:
  - Se opera usando la aritmética destino (base r_d)
  - La idea es hacer uso de la naturaleza posicional del sistema, calculando el siguiente producto interior:

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \times r_o^{\,i})$$

  - Por ejemplo, para convertir **1672** de octal a decimal:

$$\begin{aligned}(1672)_8 &= 1 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 \\ &= 512 + 384 + 56 + 2 \\ &= (954)_{10}\end{aligned}$$

Conversión de enteros

- Método de la división:
  - Se opera usando la aritmética origen (base $\mathbf{r_o}$)
  - Una vez más, la idea es hacer uso de la naturaleza posicional del sistema teniendo en cuenta que los exponentes en esta ocasión son negativos
  - Los dígitos se calculan sucesivamente dividiendo por la base destino hasta llegar a un cociente nulo

  $\mathbf{X = Q_0 \times r_d + X_0}$, con $\mathbf{X_0 = |X| \bmod r_d}$

  Luego, $\mathbf{Q_0 = Q_1 \times r_d + X_1}$, con $\mathbf{X_1 = |Q_0| \bmod r_d}$
  y así sucesivamente hasta que $\mathbf{Q_i = 0}$

Conversión entre enteros

- Consideremos el ejemplo recíproco al anterior, esto es, convertir **954** de decimal a octal

$$X_0 = 954 \bmod 8 = 2 \text{ y } Q_0 = (954 - 2) / 8 = 119$$

$$X_1 = 119 \bmod 8 = 7 \text{ y } Q_1 = (119 - 7) / 8 = 14$$

$$X_2 = 14 \bmod 8 = 6 \text{ y } Q_2 = (14 - 6) / 8 = 1$$

$$X_3 = 1 \bmod 8 = 1 \text{ y } Q_3 = (1 - 1) / 8 = \underline{0}$$

- El resultado es finalmente $(1672)_8$
  - Los dígitos van apareciendo en orden inverso

Conversión de fracciones

- Todo número entero representable con una cantidad finita de dígitos en una cierta base tendrá una representación con una cantidad también finita de dígitos en cualquier otra base
- En contraste, en los números fraccionarios puede que un número representado con una cantidad finita de dígitos en una base requiera una cantidad infinita de dígitos en otra
  - Siempre es posible calcular los primeros **k** dígitos como su representación aproximada

Conversión de fracciones

- Método de la multiplicación:
  - Se opera usando la aritmética origen (base $\mathbf{r_o}$)
  - La idea es ir obteniendo los distintos dígitos $\mathbf{X_i}$ multiplicando la fracción por la base $\mathbf{r_d}$
  - El primer dígito $\mathbf{X_{-1}}$, se obtiene como:

"parte entera de"

$$\mathbf{X_{-1}} = \lfloor\, |\mathbf{X}| \times \mathbf{r_d} \,\rfloor$$

  - Luego, sea $\mathbf{\sim X_{-1}}$ la parte fraccionaria de $|\mathbf{X}| \times \mathbf{r_d}$, los restantes dígitos se deben calcular como $\mathbf{X_{-2}} = \lfloor \mathbf{\sim X_{-1}} \times \mathbf{r_d} \rfloor$, y así sucesivamente

Conversión de fracciones

- Por ejemplo, para convertir **0.7632** de octal a decimal, con cuatro dígitos de precisión:
  - $(0.7632)_8 \times (12)_8 = (11.6004)_8$, por lo que $X_{-1} = 9$
  - $(0.6004)_8 \times (12)_8 = (7.405)_8$, por lo que $X_{-2} = 7$
  - $(0.405)_8 \times (12)_8 = (5.062)_8$, por lo que $X_{-3} = 5$
  - $(0.062)_8 \times (12)_8 = \underline{(0.764)}_8$, por lo que $X_{-4} = 0$
- Finalmente, $(0.7632)_8$ se corresponde con $(0.9750)_{10}$ al usar cuatro dígitos de precisión

Conversión de fracciones

- Método de la división:
  - Se opera usando la aritmética destino (base $\mathbf{r_d}$)
  - Es análogo al método del producto para los enteros, sacamos provecho de la naturaleza posicional del sistema calculando el siguiente producto interior:

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} (x_{-i} \times r_o^{-i})$$

  - Por caso, para convertir **0.7632** de octal a decimal, se calcula lo siguiente operando en base **10**:

$$((((((2/8)+3)/8)+6)/8)+7)/8 = (0.9750)_{10}$$

Métodos preferidos

- Los humanos hemos de preferir naturalmente operar en base **10**, por lo que usaremos cualquier método que nos permita hacer uso de nuestra familiar base
- Las computadoras han de hacer algo análogo, prefiriendo toda vez que se pueda la base **2**, si bien también se intenta evitar hacer un uso excesivo de la operación de división
  - La razón es que se trata de una operación costosa a nivel de tiempo de ejecución

¿Preguntas?